CORRIGÉ

Exercice 1.

Partie A.

1. Soit M un point du plan de coordonnées (x, y). D'une part, la distance de M à F est donnée par $d(M, F) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2}$ et d'autre part, la distance de M à (d) est donnée par $d(M, (d)) = \sqrt{(y+1)^2} = |y+1|$.

   Ainsi, un point $M(x, y)$ est équidistant de F et (d) si et seulement si $d(M, F) = d(M, (d))$ si et seulement si $d(M, F)^2 = d(M, (d))^2$ (car les deux quantités sont positives) si et seulement si
   $$x^2 + (y-1)^2 = (y+1)^2$$
   si et seulement si
   $$x^2 + y^2 - 2y + 1 = y^2 + 2y + 1$$
   si et seulement si
   $$x^2 = 4y$$
   si et seulement si
   $$y = \frac{1}{4}x^2.$$
   L'ensemble des points équidistants de F et (d) est donc la parabole P d'équation $y = \frac{1}{4}x^2$.

2. a) Notons ι la symétrie centrale de centre M. Puisque (AH) est une droite passant par M, $\iota([MA)) = \iota([MH))$. De même $\iota([MB)) = \iota([MQ))$. En remarquant que ι est une isométrie qui conserve donc les angles, on en déduit que l'angle enfermé entre les demi-droites $[MB)$ et $[MA)$ et identique à l'angle enfermé entre les demi-droites $[MQ)$ et $[MH)$. D'où $\widehat{AMB} = \widehat{HMQ}$.

   b) Nous allons montrer que T_M est la médiatrice du segment $[F, H]$. Cela impliquera, en particulier que tout point de T_M (et en particulier Q) est à égal distance de F et H.

   Par la question 1, on a $d(M, F) = d(M, (d))$. Or la distance d'un point à une droite s'obtient en prenant la distance de ce point à son projeté orthogonal sur cette droite. Puisque ce projeté orthogonal est H par définition, on en déduit que $d(M, (d)) = d(M, H)$ par définition, d'où $FM = MH$.

   Un vecteur directeur v de T_M est de coordonnées $(1, \frac{1}{2}x)$ (obtenu en dérivant $x \mapsto (x, \frac{1}{4}x^2)$. De plus le vecteur $\overrightarrow{FH}$ a pour coordonnées $(x, -2)$. D'où $\langle v, \overrightarrow{FH}\rangle = x - 2 \times \frac{1}{2}x = 0$ et donc T_M est orthogonal à (FH).

   On vient de justifier que T_M est une droite passant par un point de la médiatrice de $[F, H]$ et ayant la même direction que la médiatrice de $[F, H]$, on en déduit que T_M est la médiatrice de $[F, H]$ et donc, par conséquent $Q \in T_M$ vérifie $FQ = QH$.

   c) D'après ce qui précède, $FM = MH$ et $FQ = FH$. Or $QM = QM$ ainsi les triangles $[F, M, Q]$ et $[H, M, Q]$ ont les mêmes longueurs et donc, par suite, sont isométriques l'un à l'autre. Il est alors claire (puisque $[Q, M]$ est l'hypothénuse des 2 triangles) que l'angle en M de l'un correspond à l'angle M de l'autre de tel sorte que $\widehat{AMB} = \widehat{FMQ}$.

   d) Une parabole permet de concentrer un signal venant de l'infini. En effet, un signal venant de l'infini (représenté par A) va venir intersecter la parabole en descendant verticalement (le long de la droite Δ_M) en un point M puis va se réflecter contre la direction de (T_M) en reproduisant un angle identique à celui de Δ_M et T_M. D'après la question c), en faisant ceci le signal va nécessairement passer par le point F qui est le point focal de la parabole.

Partie B.

1. Commençons par calculer une équation cartésienne de la droite (AB). Le point A est de coordonnées (a, a^2) et le point B de coordonnées $(-b, b^2)$. Un vecteur directeur pour la droite (AB) est donc de coordonnées
$$(a+b, a^2-b^2) = (a+b, (a-b)(a+b))$$
et donc quitte à diviser par $a+b$ (qui est strictement positif), on obtient, comme vecteur directeur :
$$(1, a-b)$$
Ainsi l'équation cartésienne de (AB) s'écrit :
$$(b-a)x + y = k$$
avec k à déterminer. Puisque (AB) passe par A, on sait que $(b-a)a + a^2 = k$ et donc $k = ba$. Une équation cartésienne de (AB) est donc donnée par :
$$(b-a)x + y = ab$$
Le point C est obtenu comme l'intersection de (AB) avec l'axe des ordonnées (qui a pour équation cartésienne $x = 0$) il est alors clair que le seul point vérifiant $\begin{cases} (b-a)x + y = ab \\ x = 0 \end{cases}$ est le point de coordonnées $(0, ab)$.
2. D'après la question précédente, cette question revient à se demander quels sont les entiers qui ne peuvent s'écrire ab avec a et b différents de 1. Dire qu'un entier ≥ 2 s'écrit ab avec a et b différents de 1 cela équivaut à dire qu'il existe un diviseur non-trivial de cet entier. Ainsi les points non-atteints par la construction décrite sont simplement les points qui n'admettent pas de diviseur non-trivial, c'est à dire les nombres premiers. On remarquera que, en plus, 1 n'est pas atteint non-plus.

Exercice 2.

Partie A. conjecture

1. **def** suite(a) :
   $u = a$
   for $n = 0$ **to** 14 :
   $u = (n+1)u - \frac{1}{e}$
   return u
2. Pour $a = 1$ on conjecture que la suite (u_n) tend vers $+\infty$.
   Pour $a = 0.5$ on conjecture que la suite (u_n) tend vers $-\infty$.
   Pour $a = 1 - e^{-1}$ on conjecture que la suite (u_n) tend vers 0.

Partie B. Cas où $a = 1 - \frac{1}{e}$

1. a) En remarquant qu'une primitive de $t \mapsto e^{-t}$ est donnée par $t \mapsto -e^{-t}$, le théorème fondamental de l'analyse nous permet d'affirmer :
$$v_0 = \int_0^1 e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^1 = -e^{-1} + 1 = 1 - \frac{1}{e}.$$
   b) Soit $n \geq 0$, on a
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \int_0^1 t^{n+1}e^{-t}dt \\ &= [-t^{n+1}e^{-t}]_0^1 + \int_0^1 (n+1)t^n e^{-t}dt \text{ avec une intégration par parties} \\ &= -e^{-1} + 0 + (n+1)v_n \\ &= (n+1)v_n - \frac{1}{e} \end{aligned}$$
2. a) Soit $n \geq 0$. Pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leq t \leq 1$ et donc $0 \leq t^{n+1} \leq t^n$ en multipliant par $t^n \geq 0$, puis $0 \leq t^{n+1}e^{-t} \leq t^n e^{-t}$ en multipliant par $e^{-t} \geq 0$ et donc, par croissance de l'intégrale :
$$\underbrace{\int_0^1 0dt}_{=0} \leq \underbrace{\int_0^1 t^{n+1}e^{-t}dt}_{=v_{n+1}} \leq \underbrace{\int_0^1 t^n e^{-t}dt}_{=v_n}$$
   et donc (v_n) est décroissante, minorée par 0.
   b) Toute fonction décroissante et minorée est convergente. En particulier, (v_n) étant décroissante et minorée par la question a), on en déduit qu'elle est convergente.
3. a) La fonction $t \mapsto e^{-t}$ admet pour dérivée $t \mapsto -e^{-t}$ qui est négative. On en déduit que $t \mapsto e^{-t}$ est décroissante et donc pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leq t \leq 1$ implique $\frac{1}{e} = e^{-1} \leq e^{-t} \leq e^{-0} = 1$.
   b) Pour tout n et $t \in [0,1]$, on a $t^n e^{-t} \leq t^n$ (avec le a)) et donc, par croissance de l'intégrale, on obtient
$$v_n \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}t^{n+1}]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$
   Puisque l'on a déjà montré que $v_n \geq 0$, on a bien
$$0 \leq v_n \leq \frac{1}{n+1}.$$
   c) D'une part la suite constante égale à 0 et la suite $(\frac{1}{n+1})$ convergent vers 0 d'autre part, par la question précédente, on a l'encadrement $0 \leq v_n \leq \frac{1}{n+1}$. On déduit, par le théorème des gendarmes, que la suite (v_n) converge vers 0.

Partie C. Cas où $a = 1 - \frac{1}{e}$

1. Montrons par récurrence que pour tout n, $u_n = v_n + n!(u_0 - v0)$.

   Pour $n = 0$, on a $v_0 + 0!(u_0 - v_0) = v_0 + u_0 - v_0 = u_0$. D'où le cas $n = 0$.

   Supposons que pour un certain n, on ait $u_n = v_n + n!(u_0 - v_0)$. Montrons que $u_{n+1} = v_{n+1} + (n+1)!(u_0 - v_0)$. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (n+1)u_n - \frac{1}{e} \text{ par définition} \\ &= (n+1)v_n + (n+1)n!(u_0 - v_0) - \frac{1}{e} \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= v_{n+1} + (n+1)!(y_0 - v_0) \text{ par 1. b)} \end{aligned}$$

2. Remarquons que $u_0 = a$ et $v_0 = 1 - \frac{1}{e}$. Ainsi,
   — si $a > 1 - \frac{1}{e}$ alors $u_0 - v_0 > 0$ et donc

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0 + \infty = +\infty.$$

   — si $a = 1 - \frac{1}{e}$ alors $u_0 = v_0$ et donc

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} v_n = 0.$$

   — si $a < 1 - \frac{1}{e}$ alors $u_0 - v_0 < 0$ et donc

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0 - \infty = -\infty.$$

Exercice 3.

Partie A.

1. On a
$$\overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{AD} + (a-1)\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AD} + (a-1)\overrightarrow{AE}.$$
Ainsi $\overrightarrow{FJ}$ a pour coordonnées $(0, 1, a-1)$. D'autre part, le centre I de la face $[A, D, H, E]$ est, par définition l'isobarycentre de $\{A, D, H, E\}$ et a donc pour coordonnées
$$\left(\frac{0+0+0+0}{4}, \frac{0+1+1+0}{4}, \frac{1+0+0+1}{4}\right) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$
Ainsi la droite (d) est paramétrée par
$$\left(0, \frac{1}{2} + t, \frac{1}{2} + (a-1)t\right),\ t \in \mathbb{R}.$$
La droite (AE) est paramétrée par
$$(0, 0, s),\ s \in \mathbb{R}$$
Ainsi le point K s'écrit $\left(0, \frac{1}{2} + t, \frac{1}{2} + (a-1)t\right)$ et $(0, 0, s)$ pour des t et s. On obtient alors $t = -1/2$ et donc K est de coordonnées $(0, 0, 1 - \frac{a}{2})$.
La droite (DH) est paramétrée par
$$(0, 1, s),\ s \in \mathbb{R}$$
Ainsi le point L s'écrit $\left(0, \frac{1}{2} + t, \frac{1}{2} + (a-1)t\right)$ et $(0, 1, s)$ pour des t et s. On obtient alors $t = 1/2$ et donc L est de coordonnées $(0, 1, \frac{a}{2})$.

2. Un parallélogramme est caractérisée par deux vecteurs opposés égaux. D'une part $\overrightarrow{KL}$ a pour coordonnées $(0, 1, a-1)$. D'autre par $\overrightarrow{FJ}$ a pour coordonnées $(0, 1, a-1)$. Les vecteurs $\overrightarrow{KJ}$ et $\overrightarrow{FJ}$ sont donc égaux pour tout $a \in [0, 1]$ et donc pour tout $a \in [0, 1]$, le quadrilatère $[F, J, L, K]$ est un parallélogramme.

3. Un parallélogramme est un losange si et seulement si deux côtés adjacents du parallélogramme sont de même longueur. Calculons donc KF^2 et FJ^2 avec le théorème de Pythagore.
   — En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle $[K, E, F]$ rectangle en E on en déduit que $KF^2 = KE^2 + EF^2 = \frac{a^2}{4} + 1$.
   — En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle $[F, G, J]$ rectangle en E on en déduit que $FJ^2 = FG^2 + GJ^2 = (1-a)^2 + 1 = 2 + 2a + a^2$.

   Ainsi $[F, J, L, K]$ est un losange si et seulement si $KF^2 = FJ^2$ si et seulement si $\frac{a^2}{4} + 1 = 2 + 2a + a^2$ si et seulement si $\frac{3a^2}{4} + 2a + 1 = 0$ si et seulement si $3a^2 + 8a + 4 = 0$. Ceci est une équation de degré 2 en a. Son discriminant est $64 - 48 = 16 = 4^2$ ainsi, il y a 2 solutions :
$$a_\pm = \frac{-8 \pm 4}{6} = -3 \text{ ou } -\frac{2}{3}.$$
Il n'y a donc que des solutions négatives, or $a \in [0, 1]$, on en conclut que $[K, F, L, J]$ n'est jamais un losange.

4. Un parallélogramme est un rectangle si et seulement si il a au moins un angle droit. Par la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle $[F, K, L]$ est rectangle en K si et seulement si $LF^2 = KL^2 + KF^2$.

   Or $LF^2 = 1 + 1 + (1 - \frac{a}{2})^2 = 3 - a + \frac{a^2}{4}$, $KL^2 = 0 + 1 + (1-a)^2 = 2 - 2a + a^2$ et $KF^2 = 1 + \frac{a^2}{4}$. Ainsi $[F, J, K, L]$ est un rectangle si et seulement si $3 - a + \frac{a^2}{4} = 3 - 2a + \frac{5a^2}{4}$ si et seulement si $a = a^2$ si et seulement si $a(1-a) = 0$ si et seulement si $a = 0$ ou 1.

5. Un quadrilatère est un carré si et seulement s'il est à la fois un losange et un rectangle. Or $[F, J, K, L]$ n'est jamais un quadrilatère par 3, donc $[F, J, K, L]$ n'est jamais un carré.

Partie B.

1. Déterminons une équation cartésienne de (KFJ). Les points K et L sont, dans ce cas, de coordonnées respectives $(0,0,\frac{2}{3})$ et $(0,1,\frac{1}{3})$. Ainsi $\overrightarrow{KL}$ a pour coordonnées $(0,1,-\frac{1}{3})$. De plus, $\overrightarrow{KF}$ a pour coordonnées $(1,0,\frac{1}{3})$.

   Un vecteur v de coordonnées $(x,y,3)$ est orthogonal à $\overrightarrow{KL}$ si et seulement si $y=1$ et est orthogonal à $\overrightarrow{KF}$ si et seulement si $x=-1$. Ainsi v de coordonnées $(-1,1,3)$ est orthogonal au plan (KFJ).

   On en déduit que l'équation cartésienne de (KFJ) est de la forme $x-y+3z=k$ avec k à déterminer. Or $F\in(KFJ)$ donc l'équation cartésienne est donnée par $-x+y+3z=-1-0+3=2$.

   Finalement la droite Δ orthogonale à (KFJ) passant par H est paramétrée par :

$$(1-t,1+t,1+3t),\ t\in\mathbb{R}$$

   Par définition, le point N est l'intersection de (KFJ) avec la droite Δ. Ainsi N a pour coordonnées : $(-t,1+t,1+3t)$ doit vérifier

$$t+1-t+9t+3=2$$

   si et seulement si $t=-\frac{2}{11}$. Ainsi N a pour coordonnées $(\frac{2}{11},\frac{9}{11},\frac{5}{11})$.

   Le vecteur $\overrightarrow{NH}$ a donc pour coordonnées $(\frac{2}{11},-\frac{2}{11},-\frac{6}{11})$. On en déduit que $NH=\sqrt{\frac{4+4+36}{11^2}}=\frac{2}{\sqrt{11}}$.

2. Le volume d'une pyramide de base $\mathcal{B}$ et de hauteur h est donné par $\frac{Aire(\mathcal{B})h}{3}$. La pyramide a pour base le parallélogramme $[F,J,L,K]$ et pour hauteur $[H,N]$. Ainsi, par la question précédente, $h=\frac{2}{\sqrt{11}}$. Il nous reste donc à calculer l'aire du parallélogramme $[F,J,L,K]$. Or on sait que $Aire([F,J,L,K])=\|\overrightarrow{KF}\wedge\overrightarrow{KL}\|$ (où $\wedge$ désigne le produit vectoriel) donc

$$Aire([F,J,L,K])=\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\1\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}\right\|=\frac{\sqrt{11}}{3}.$$

   Ainsi le volume de la pyramide est donné par $\frac{\frac{\sqrt{11}}{3}\frac{2}{\sqrt{11}}}{3}=\frac{2}{9}$.

Exercice 4.

Partie A. conjectures et premiers résultats

1. a) Pour cette question on suppose que la particule démarre en 1. L'évènement « la particule part en 0 au premier instant » est clairement contenu dans l'évènement « la particule s'arrête en position 0 ». La probabilité du premier évènement est de $\frac{1}{4}$ (puisqu'il y a une chance sur 4 d'aller à gauche partant de 1) et la probabilité du second évènement est p_1 par définition. D'où par croissance de la mesure de probabilité, $p_1 \geq \frac{1}{4}$.

   b) Pour cette question on suppose que la particule démarre en 2. L'évènement « la particule part en 1 au premier instant puis en 0 au deuxième instant » est clairement contenu dans l'évènement « la particule s'arrête en position 0 ». La probabilité du premier évènement est de $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ (puisqu'il y a une chance sur 4 d'aller à gauche partant de 2, une sur 4 d'aller à gauche partant de 1 et que les deux évènements sont indépendants) et la probabilité du second évènement est p_2 par définition. D'où par croissance de la mesure de probabilité, $p_2 \geq \frac{1}{16}$.

   c) Pour cette question on suppose que la particule démarre en 3. L'évènement « la particule part en 2 au premier instant puis en 1 au deuxième instant puis en 0 au troisième instant » est clairement contenu dans l'évènement « la particule s'arrête en position 0 ». La probabilité du premier évènement est de $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$ (puisqu'il y a une chance sur 4 d'aller à gauche partant de 3, une chance sur 4 d'aller à gauche partant de 2, une sur 4 d'aller à gauche partant de 1 et que les trois évènements sont mutuellement indépendants) et la probabilité du second évènement est p_3 par définition. D'où par croissance de la mesure de probabilité, $p_3 \geq \frac{1}{64}$.

2. a) La fonction « marche » permet de simuler un déplacement d'une particule partant d'un point donné en argument. Elle renvoie la position finale de la particule : 0 ou 4.

   La fonction « freqzero » permet de simuler un grand nombre de déplacements (donné en argument) d'une particule partant d'un point donné en argument. Elle renvoie la fréquence d'arrivée à 0 de la particule.

   b) Puisqu'il y a beaucoup de marches simulées (un million) on peut conjecturer que le nombre renvoyé par freqzero$(10^6, n)$ soit proche de p_n Ainsi on conjecture :

$$p_1 = \frac{1}{3},\ p_2 = \frac{1}{10} \text{ et } p_3 = \frac{1}{40}.$$

Partie B.

1. Si la particule démarre à 0 alors la particule s'arrête à 0 ainsi $p_0 = 1$. De même si la particule démarrer à 4 alors la particule s'arrête à 4 et donc ne peut jamais aller à 0 de telle sorte que $p_4 = 0$.
2. Soit $n \in \{1, 2, 3\}$. L'évènement « partant de n la particule va à 0 » se décompose en 2 évènements disjoints :
   — l'évènement « partant de n la particule va à gauche puis à 0 » de probabilité q_g.
   — et l'évènement « partant de n la particule va à droite puis à 0 » de probabilité q_d.

   Par la formule des probabilités totales, $p_n = q_g + q_d$. Calculons la probabilité q_g. L'évènement « partant de n la particule va à gauche puis à 0 ». Cet évènement est l'intersection des évènements indépendants « la particule va à gauche » (de probabilité $\frac{1}{4}$) et « partant de $n-1$ la particule va à gauche puis à 0 » (de probabilité p_{n-1}). On en déduit que $q_g = \frac{1}{4}p_{n-1}$. De même $q_d = \frac{3}{4}p_{n+1}$. D'où $p_n = \frac{3}{4}p_{n+1} + \frac{1}{4}p_{n-1}$.
3. On a donc trois équations :

$$p_1 = \frac{3}{4}p_2 + \frac{1}{4},\ p_2 = \frac{3}{4}p_3 + \frac{1}{4}p_1 \text{ et } p_3 = \frac{1}{4}p_2$$

   ou encore

$$4p_1 = 3p_2 + 1,\ 4p_2 = 3p_3 + p_1 \text{ et } 4p_3 = p_2.$$

On a $\begin{cases} 4p_1 = 3p_2 + 1 \\ 4p_2 = 3p_3 + p_1 \\ 4p_3 = p_2 \end{cases}$ si et seulement si $\begin{cases} 4p_3 = p_2 \\ 4p_1 = 12p_3 + 1 \\ 16p_3 = 3p_3 + p_1 \end{cases}$ si et seulement si $\begin{cases} 4p_3 = p_2 \\ 13p_3 = p_1 \\ 52p_3 = 12p_3 + 1 \end{cases}$

si et seulement si $\begin{cases} p_3 = \frac{1}{40} \\ p_2 = \frac{1}{10} \\ p_1 = \frac{13}{40} \end{cases}$

Partie C.

1. Notons P la probabilité de l'évènement « au moins 3 des particules s'arrêtent à 0 ». Le complémentaire de cet évènement est « au plus 2 des particules s'arrêtent à 0 ». On décompose ce dernier évènement comme trois évènements disjoints
   — aucune particule ne s'arrête à 0,
   — seule une particule s'arrête à 0,
   — exactement deux particules s'arrêtent à 0.

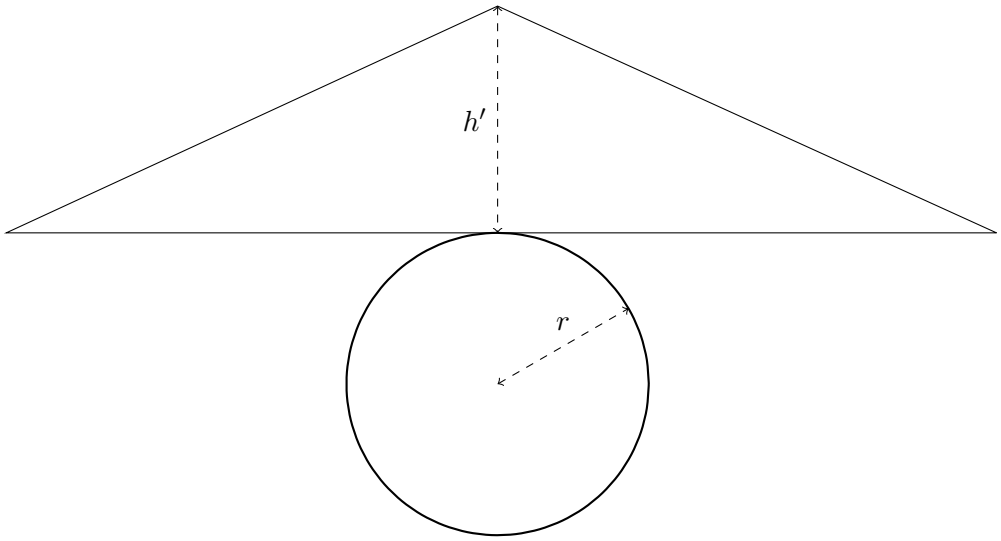
   On reconnait ici, une loi binomiale de paramètre 100 et p_3. Ainsi, la probabilité du premier évènement est $(1-p_3)^{100}$, la probabilité du deuxième évènement est donné par $100(1-p_3)^{99}p_3$ et la probabilité du troisième est donné par $\binom{100}{2}(1-p_3)^{98}p_3^2$. Ainsi, puisque ces évènements sont disjoints on en déduit que la probabilité qu'au plus 2 des particules s'arrêtent à 0 est de $(1-p_3)^{100} + 100(1-p_3)^{99}p_3 + \frac{100\times 99}{2}(1-p_3)^{98}p_3^2$. Au final, la probabilité recherchée est :
   $$1 - \left((1-p_3)^{100} + 100(1-p_3)^{99}p_3 + \frac{100\times 99}{2}(1-p_3)^{98}p_3^2\right).$$
2. Notons N le nombre de particules et P_N la probabilité qu'au moins l'une d'entre elle s'arrête à 0. Le complémentaire de l'évènement « au moins l'une d'entre elle s'arrête à 0 » est « toutes les particules s'arrêtent à 4 » qui est de probabilité (par indépendance du comportement des particules) $(1-p_3)^N$. Ainsi $P_N = 1-(1-p_3)^N$.

   Il s'agit donc, au final de chercher N tel que $P_N \geq \frac{99}{100}$ ou encore $\frac{1}{100} \geq (1-p_3)^N$ ou encore $-\ln(100) \geq N\ln(1-p_3)$ ou encore $-2\ln(10) \geq N\ln(\frac{39}{40})$ ou encore $N \geq -\frac{2\ln(10)}{\ln(\frac{39}{40})}$ qui est environ égal à $181,2$ (avec une calculatrice). Ainsi il suffit d'avoir 182 particules.

Exercice 5.

1. a) $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$.

   b) On a



   Ainsi, l'aire A est donnée par l'aire du triangle isocèle.

   Le triangle isocèle a pour hauteur h' et pour base un côté dont la longueur est égal au périmètre du disque formant la base du cône. Ainsi la base du triangle isocèle est de longueur $2\pi r$. Au final, on en déduit que l'aire du triangle isocèle est donné par $\frac{2\pi r h'}{2} = \pi r h'$.

   On calcule maintenant la hauteur h' du triangle isocèle. En effet on voit facilement que la hauteur h' est l'hypothenuse d'un triangle rectangle de côté h et r de telle sorte que $h' = \sqrt{r^2 + h^2}$. D'où $A = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$.

2. On doit inscrire
   — dans $A3$, $= A2 + 1$,
   — dans $B2$, $= 3F\$5/\pi A2^2$ et
   — dans $C2$, $= \pi A2\sqrt{A2^2 + B2^2}$.

3. On a $\mathcal{A}(r) = \pi r\sqrt{r^2 + h^2} = \frac{\sqrt{\pi^2 r^6 + \pi^2 h^2 r^4}}{r}$. Or $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$ donc $\pi h r^2 = 3V$ d'où $\pi^2 h^2 r^4 = 9V^2$ et donc
$$\mathcal{A}(r) = \frac{\sqrt{\pi^2 r^6 + 9V^2}}{r}.$$

4. On dérive la fonction $\mathcal{A}$ (qui est dérivable en dehors de 0). On a
$$\mathcal{A}'(r) = \frac{r\frac{6\pi^2 r^5}{2\sqrt{\pi^2 r^6 + 9V^2}} - \sqrt{\pi^2 r^6 + 9V^2}}{r^2} = \frac{3\pi^2 r^6 - \pi^2 r^6 - 9V^2}{r^2\sqrt{\pi^2 r^6 - 9V^2}} = \frac{2\pi^2 r^6 - 9V^2}{r^2\sqrt{\pi^2 r^6 + 9V^2}}$$

   Ainsi $\mathcal{A}'(r) = 0$ si et seulement si $r^6 = \frac{9V^2}{2\pi^2}$ si et seulement si $r^3 = \frac{3V}{\sqrt{2}\pi}$ si et seulement si $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{\sqrt{2}\pi}}$. On note r_0 cette valeur. De plus si $r \in]0, r_0[$ alors $\mathcal{A}'(r) < 0$ et si $r > r_0$ alors $\mathcal{A}'(r) > 0$. Par conséquent, $\mathcal{A}$ est décroissante sur $]0, r_0]$, puis croissante sur $[r_0, +\infty[$ de telle sorte que le rayon minimisant l'aire est donné par $r_0 = \sqrt[3]{\frac{3V}{\sqrt{2}\pi}}$.

5. Pour $V = 250cm^3$, la formule donnée ci-dessus nous donne $r = 5,5cm$ et (obtenu à partir de 1. a)) $h = 7,8cm$ (calculs effectués avec une calculatrice).